Cevap Anahtarı

Adı Soyadı:
Numarası:

26.01.2019

İDEAL TEORİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) Bir R halkasının tüm ideallerinin kümesi $I(R)$ olsun. $(I(R),\subseteq)$ ikilisinin bir kısmi sıralı küme ve bir latis(kafes) olduğunu gösteriniz.

2) a) $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olsun. J, S'nin bir ideali ise $\left(\sqrt{J}\right)^C=\sqrt{J^C}$ olduğunu gösteriniz.

   b) R bir Boole halkası ve I, R'nin has ideali olsun. Her $a\in R$ için $a\in I$ veya $1-a\in I$ ise I ideali maksimal idealdir. Gösteriniz.

3) a) R ve S iki halka ve $f:R\to S$ bir halka epimorfizması olsun. S Tamlık bölgesi ise $Çek\, f$ R'de asaldır, gösteriniz.

   b) R birimli ve değişmeli bir halka ve M, R de maksimal ideal olsun. Bu durumda R/M bölüm halkası cisimdir, gösteriniz.

4) Rasyonel sayılar cisminin bir otomorfizmasından başka otomorfizmasının olmadığını gösteriniz.

5) a) $\mathbb{Z}_{20}$ halkasının Jacopson radikalini hesaplayınız.

   b) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $I=20\mathbb{Z}$ idealinin radikalini hesaplayınız.

NOT: Sadece 4 soru seçip cevaplayınız.

1- $(I(R),\subseteq)$ bir KSK dır.

$\forall I\in I(R)$ için $I\subseteq I$ old. yansıma var

$\forall I,J\in I(R)$ için $I\subseteq J$ ve $J\subseteq I$ ise $I=J$ T. simetri var

$\forall I,J,K\in I(R)$ için $I\subseteq J$ ve $J\subseteq K$ ise $I\subseteq K$ Geçişme var.

$\forall I,J\in I(R)$ için $\sup\{I,J\}=I\vee J$, $\inf\{I,J\}=I\wedge J$ old. gösterelim.

$I,J\in I(R)$ için $I\cap J$ ve $I+J\in I(R)$ dir.

$I,J\subseteq I+J$, $I,J\subseteq K$ için $K\in I(R)$ olsun. $I+J\subseteq K$ old.dan

$\sup\{I,J\}=I\vee J=I+J$ bulunur.

$K\subseteq I$, $K\subseteq J$ iken $K\subseteq I\cap J$ old.dan dan

$\inf\{I,J\}=I\wedge J=I\cap J$ Bulunur.

2- a) $r \in (\sqrt{J})^c = f^{-1}(\sqrt{J}) \iff f(r) \in \sqrt{J}$

$\iff n \geq 1,\ f(r)^n = f(r^n) \in J$

$\iff r^n \in f^{-1}(J r) = J^c$

$\iff r \in \sqrt{J^c}$

b) $0_R = a(1-a) \in I$ ve I asal old. dan

ya $a \in I \vee (1-a) \in I$ dir.

3- a) $f(R) = S$ old. dan homomorfizma teo. dan

$R/_{Çekf} \cong S$ dir S, T.B old. Çekf, R'nin asal

idealidir.

b) M maksimal ideal olsun. $M \neq R$, $R/_M \neq \{e\}$ dir.

$a \in R$, $M \neq a+M \in R/_M$ tersinir old. ğunu gösterelim.

M maksimal ideal $a \notin M$ ise $(M, a) = R$

$1_R = m + ra$, $m \in M$, $r \in R$ $(r+M)(a+M) = ra + M = 1_R + M$

$= 1_{R/M}$ olduğundan R/M cisimdir.

4- $f: Q \longrightarrow Q$ bir otomorfizma olsun. $f(0)=0$, $f(1)=1$

$f(n) = f(1+\cdots+1) = n.f(1) = n$, $f(-n) = -f(n)$, $(\forall n \in \mathbb{Z}$ için$)$

$f(n) = f(1+\cdots+1)$ ... $f(n) = n.f(\frac{1}{n})$ olup

$1 = f(1) = f(n.\frac{1}{n}) = f(n).f(\frac{1}{n}) = n.f(\frac{1}{n})$

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ bulunur.

$\forall \frac{m}{n} \in Q$ için $f(\frac{m}{n}) = f(m.\frac{1}{n}) = f(m).f(\frac{1}{n}) = m.\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$

bulunur.

5- a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{20}$, $f(n) = \bar{n}$ ile tanımlayalım.

$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{20}$ ve $Çekf = 20\mathbb{Z}$ dir. Çekf' içeren idealler

$\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}$, ve $20\mathbb{Z}$ dir. Aynı zamanda $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{20}$

$f(2\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}\}$ $f(4\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}\}$

$f(5\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$, $f(10\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \overline{10}\}$, $f(20\mathbb{Z}) = \{\bar{0}\}$

$\mathbb{Z}_{20}$ halkasının maksimal idealleri $I = f(2\mathbb{Z})$, $J = f(5\mathbb{Z})$ olup

$J(\mathbb{Z}_{20}) = I \cap J = \{\bar{0}, \overline{10}\}$ dir

b) $\sqrt{I} = \sqrt{20\mathbb{Z}} = (2.5)\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}$ dir.